TEMA 3 – ECUACIONES INECUACIONES Y SISTEMAS

3.1 ECUACIONES

3º Una **ecuación** es una propuesta de igualdad en la que interviene alguna letra llamada **incógnita**.

3º La **solución** de la ecuación es el valor o valores de las incógnitas que hacen que la igualdad sea cierta.

3º **Resolver** una ecuación es hallar su solución, o soluciones, o llegar a la conclusión de que no existe.

3.2 TIPOS DE ECUACIONES

3º Existen diversos tipos de ecuaciones:

- **Polinómicas**: En ellas, la incógnita aparece solamente en expresiones polinómicas.
- **Con radicales**: La incógnita dentro de una raíz.
- **Con la x en el denominador**:
- **Con la x en el exponente**
- **Otros tipos**: logarítmicas, trigonométricas,..

3.3 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

3º 3.3.1 DEFINICIÓN

3º Una **ecuación de primer grado** es una expresión que se puede reducir a la forma **$ax + b = 0$**, siendo $a \neq 0$. Tiene una **única solución**: $x = -b/a$

3º Existen expresiones que parecen ecuaciones de primer grado y que, sin embargo, no tienen solución o tienen infinitas soluciones:

- $3x - 5 = 3(x + 1) \Rightarrow 0x = 8 \Rightarrow$ No tiene solución.
- $3x - 5 = 3(x - 2) + 1 \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow$ Tiene infinitas soluciones

Realmente, estas igualdades no son ecuaciones, pues carecen del término en x. Sin embargo, puesto que antes de simplificar no sabemos en qué van a quedar, las trataremos como ecuaciones.

3º 3.3.2 ECUACIONES EQUIVALENTES

3º Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución o ambas carecen de solución.

3º 3.3.3 TRANSFORMACIONES QUE MANTIENEN LA EQUIVALENCIA DE ECUACIONES.

3º Para resolver una ecuación, hemos de despejar la x mediante una serie de pasos. Cada paso consiste en transformar la ecuación en otra equivalente en la que la x esté más próxima a ser despejada:

3º

Transformación	Regla práctica
Sumar o restar la misma expresión en los dos miembros de la igualdad.	Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro. Y viceversa.
Multiplicar o dividir los dos miembros por el mismo número distinto de cero.	Lo que está multiplicando a todo lo demás de un miembro pasa dividiendo a todo lo demás del otro. Y viceversa.

3º 3.3.4 PASOS PARA RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

3º

1. Quitar paréntesis, si los hay.
2. Quitar denominadores, si los hay. (Hacer m.c.m)
3. Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro miembro.
4. Simplificar cada miembro.
5. Despejar la x. Se obtiene, así, la solución.
6. Comprobación: Sustituir la solución en cada miembro de la ecuación inicial para comprobar que coinciden los resultados.

3.4 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

3º 3.4.1 DEFINICIÓN

3º Una ecuación de segundo grado es de la forma: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, con $a \neq 0$

Ecuaciones completas: Cuando $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Y se resuelve aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ecuaciones incompletas: Si $b = 0$ ó $c = 0$. Se pueden resolver de forma sencilla sin utilizar la fórmula anterior.

Si $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Si $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$

3º 3.4.2 NÚMERO DE SOLUCIONES

3º La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de Δ:

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones $\Rightarrow$ Se factoriza $a.(x - x_0).(x - x_1)$
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ Una solución doble $\Rightarrow$ Se factoriza $a.(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ No tiene solución $\Rightarrow$ No se puede factorizar

3º 3.4.3 REGLAS PARA RESOLVER ECUACIONES DE 2º GRADO

3º

1. Si la ecuación de segundo grado es completa, aplicar la fórmula.
2. Si la ecuación de segundo grado es incompleta, resolverla sin la fórmula, sacando factor común o despejando.
3. Si tiene una fisonomía complicada, arréglala: quita denominadores, suprime paréntesis, agrupa términos y pásalos todos al primer miembro,...Sólo cuando esté simplificada, aplica uno de los métodos anteriores.
4. Comprueba las soluciones. Y si la ecuación proviene de un problema con enunciado, haz la comprobación sobre el enunciado, pues es posible que alguna de las soluciones carezca de sentido real.

3º 3.4.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3º Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir al lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:

1. Identificar los datos conocidos, lo que deseamos conocer y dar nombre a la incógnita.
2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
3. Resolver la ecuación
4. Comprobar e interpretar la solución ajustándola al enunciado.

3.5 OTROS TIPOS DE ECUACIONES REDUCIBLES A SEGUNDO GRADO.

4º Hay ecuaciones que, sin ser de primero ni de segundo grado, se pueden resolver utilizando inteligentemente los recursos que ya tenemos.

4º 3.5.1 ECUACIONES BICUADRADAS: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

4º Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar. Para resolverlas hacemos $x^2 = z$ y, por tanto, $x^4 = z^2$. Se obtiene así una ecuación de segundo grado cuya incógnita es z: $az^2 + bz + c = 0$.

Una vez resuelta, se obtienen los correspondientes valores de x. Por cada valor positivo de z habrá dos valores de x, pues $x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z}$

4º 3.5.2 ECUACIONES CON LA x EN EL DENOMINADOR

4º Los denominadores algebraicos, al igual que los numéricos, se suprimen multiplicando por el producto de todos ellos o, mejor, por su mínimo común múltiplo. La ecuación a la que así se llega puede ser de las que sabemos resolver.

En el proceso de multiplicar por expresiones polinómicas pueden aparecer soluciones falsas. Por lo tanto, siempre que lo hagamos, **debemos comprobar todas las soluciones obtenidas en la ecuación inicial.**

4º 3.5.3 ECUACIONES CON RADICALES

4º Ocasionalmente, nos encontramos con ecuaciones en las que la x se halla bajo una raíz cuadrada. Para resolver este tipo de ecuaciones, suele convenir eliminar la raíz aislándola primero en un miembro y, después elevando ambos miembros al cuadrado. Pero, en este proceso de elevar al cuadrado, aunque se conservan todas las soluciones, pueden introducirse soluciones nuevas que, naturalmente, hay que rechazar. Por eso, en este tipo de ecuaciones **es fundamental comprobar todas las soluciones en la ecuación inicial.**

4º 3.5.4 ECUACIONES DEL TIPO (...).(....).(....) = 0

4º Para que un producto sea igual a cero, es suficiente que lo sea alguno de sus factores. Por tanto, una ecuación de este tipo se puede resolver fácilmente siempre que cada paréntesis de lugar a una ecuación que sepamos resolver.

3.6 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3º 3.6.1 DEFINICIÓN

3º Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales. $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

3º 3.6.2 SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

3º Se llama **solución** de un sistema de ecuaciones a la solución común a ambas, es decir, los valores de las incógnitas que cumplen todas las ecuaciones a la vez.

3º 3.6.3 SISTEMAS EQUIVALENTES

3º Dos **sistemas** de ecuaciones son **equivalentes** cuando tienen la misma solución.

3º 3.6.4 NÚMERO DE SOLUCIÓNES DE UN SISTEMA LINEAL

3º En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una única solución. Es el punto donde se cortan las dos rectas y se dice que es un sistema **compatible determinado**.
Pero, hay otros sistemas que no tienen solución y se llaman **incompatibles**. Gráficamente, son dos rectas paralelas, no tienen ningún punto en común.
Los sistemas que tienen infinitas soluciones se llaman **compatibles indeterminados**. Gráficamente, son dos rectas coincidentes, todos los puntos en común.

3º 3.6.5 MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES

3º

- **Método de sustitución**: Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra.
  En la práctica, al aplicar este método solo se escribe en cada paso la ecuación que se transforma, en lugar de escribir el sistema completo cada vez.
  Pasos:
  1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
  2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación con una sola incógnita.
  3. Se resuelve esta ecuación.
  4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
  5. Se ha obtenido, así, la solución.

3º

- **Método de igualación**: Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan los resultados.
  El sistema completo sería esta ecuación y una cualquiera de las anteriores en las que aparecía despejada la otra incógnita.
  Pasos:
  1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
  2. Se igualan las expresiones, lo cual da lugar a una ecuación con una incógnita.
  3. Se resuelve la ecuación.
  4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita
  5. Se ha obtenido, así, la solución.

3º

- **Método de reducción** : Se preparan las dos ecuaciones (multiplicando por los números que convenga) para que una de las incógnitas tenga coeficiente opuesto en ambas y se suman para que desaparezca esa incógnita.
  El sistema completo sería esta ecuación y una cualquiera de las anteriores.
  Pasos:
  1. Se preparan las dos ecuaciones (multiplicándolas por los números que convenga) para que una de las incógnitas tenga coeficiente opuesto en ambas.
  2. Se suman las ecuaciones para que desaparezca una de las incógnitas.
  3. Se resuelve la ecuación resultante.
  4. El valor obtenido se sustituye en una de las iniciales y se resuelve.
  5. Se tiene, así, la solución.

3º **Nota:** Si una o las dos ecuaciones del sistema tienen una fisonomía complicada, conviene “arreglarlas” hasta llegar a la expresión: $ax + by = c$.

3º 3.6.6 TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS A SISTEMAS DE ECUACIONES

3º Suele ser más sencillo plantear un problema algebraico complejo mediante una sistema de ecuaciones que mediante una única ecuación con una incógnita. Veamos los pasos que conviene dar:

1. Identificar los elementos que intervienen y nombrar las incógnitas.
2. Expresar mediante ecuaciones las relaciones existentes.
3. Resolver el sistema de ecuaciones resultante.
4. Comprobar e interpretar la solución ajustándola al enunciado.

3.7 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

4º Los métodos conocidos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, junto con lo que sabemos de resolución de ecuaciones no lineales nos permiten resolver sistemas de ecuaciones de muy diversos tipos.

3.8 INECUACIONES

4º 3.8.1 DEFINICIÓN

4º A veces los enunciados que dan lugar a una expresión algebraica no dicen “es igual”, sino “es mayor que” ó “es menor que” ó “es mayor o igual que” ó “es menor o igual que”. Esta expresión se llama inecuación.

Una **inecuación** es una propuesta de desigualdad. ¿Para que valores de x es cierto que .... < (> ó ≤ ó ≥) .....

Las respuestas a esta pregunta son las **soluciones** de la inecuación. Una inecuación suele tener infinitas soluciones.

4º 3.8.2 SISTEMA DE INECUACIONES

4º Un **sistema de inecuaciones** es un conjunto de dos o más inecuaciones.

Resolver un sistema consiste en encontrar las soluciones que verifiquen todas las inecuaciones a la vez o en decir que no hay solución.

3.9 INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

4º 3.9.1 DEFINICIÓN

4º Una **inecuación** es una desigualdad algebraica. Tiene dos miembros entre los cuales aparece uno de estos signos: <, ≤, >, ≥

Se llama **solución** de una inecuación a cualquier valor de la incógnita que haga cierta la desigualdad.

4º 3.9.2 RESOLUCIÓN GRÁFICA DE UNA INECUACIÓN

4º Para resolver gráficamente una inecuación con una sola incógnita $f(x) \leq g(x)$:

1. Se representan las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, obteniendo con toda claridad sus puntos de corte.
2. Se observa en qué intervalos se cumple la desigualdad deseada.

4º 3.9.3 RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE UNA INECUACIÓN

Para resolver una inecuación de primer grado, se procede como si fuera una ecuación con la salvedad de que si multiplicamos o dividimos por un número negativo, la desigualdad cambia de signo.

Primer grado: Se resuelve directamente
4º Grado mayor o igual que dos: Se calculan sus raíces y se dibujan sobre una recta real. Se toman valores intermedios y si cumplen la inecuación vale todo el trozo. Si las desigualdades son estrictas no se cogen los extremos.

Cocientes: Se calculan las raíces del numerador y del denominador por separado y se representan todas sobre la misma recta real. Se toman valores intermedios y si cumplen la inecuación vale todo el trozo. Las raíces del denominador no se cogen nunca y las del numerador depende de si la inecuación es estricta (No se cogen) ó si no es estricta (Se cogen)

4º 3.9.4 SISTEMAS DE INECUACIONES

4º Las soluciones de un sistema de inecuaciones son las soluciones comunes a todas las inecuaciones que forman el sistema.

Pasos:

- Se resuelve cada inecuación por separado y se representa su solución en una recta real diferente.
- Se toma como solución la intersección de las soluciones es decir las zonas que estén cogidas en todas las rectas.