1. **(Andalucía, Jun. 2016)** Dos partículas de igual masa m, unidas a dos resortes de constantes K_1 y K_2 ($K_1 > K_2$), describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por su posición de equilibrio? ¿Cuál de las dos oscila con mayor periodo? Razone las respuestas.

   Solución: La energía del MAS simple es:

   $$E = \frac{1}{2} K A^2 = E_c + \frac{1}{2} K x^2$$

   La energía cinética máxima se dará cuando el cuerpo pase por la posición de equilibrio (x = 0) y tendrá el valor:

   $$E_c = \frac{1}{2} K A^2$$

   Por tanto, tendrá más energía cinética al pasar por la posición de equilibrio, la masa unida al muelle de mayor constante (K_1).
   El periodo de oscilación tiene la expresión:

   $$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

   Por lo que el periodo será mayor para la partícula de menor constante (K_2).

2. (**Aragón, Jun. 2016**.) Por una cuerda tensa se propagan dos ondas armónicas $y_1(x,t) = +0{,}02 \cdot \text{sen}(2\pi t + 20\pi x)$ e $y_2(x, t) = -0{,}02 \cdot \text{sen}(2\pi t - 20\pi x)$ (expresadas en unidades S.I.). La interferencia de ambas produce una onda estacionaria. a) Determine la ecuación de la onda estacionaria resultante. b) Calcule la distancia entre dos nodos consecutivos. Dato: $\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta = 2\ \text{sen}\ [(\alpha - \beta)/2]\ \cos[(\alpha + \beta)/2]$

   Solución: a) La onda estacionaria resultante tiene por ecuación:

   $$y = y_1 + y_2 = 0,02\,\text{sen}\,(2\pi t + 20\pi x) - 0,02\,\text{sen}\,(2\pi t - 20\pi x) = 0,04\,\text{sen}\,2\pi t\ \cos\,20\pi x$$

   b) la distancia entre dos nodos consecutivos es igual a una semilongitud de onda. Así pues:

   $$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0,1\,\text{m} \quad \text{Por tanto :} \quad \Delta x = \frac{0,1}{2} = 0,05\,\text{m}$$

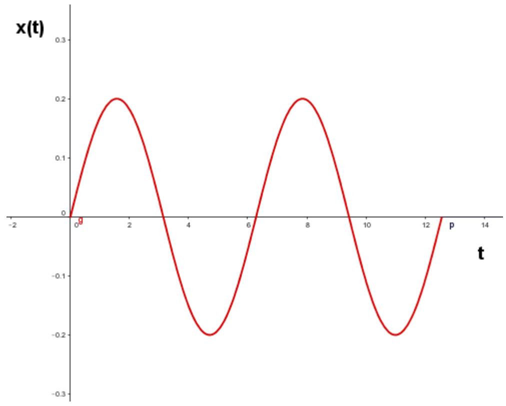
3. (**Aragón, Jun. 2016**.) Un bloque de masa M = 0,4 kg desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento sujeto al extremo de un muelle horizontal de constante elástica k = 10 N/m. Cuando pasa por la posición de equilibrio del sistema masa-muelle lleva una velocidad v_0 = 1 m/s. a) Calcule la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones de M. b) Determine la posición del centro de M en función del tiempo, x(t), a partir del instante (t = 0) en que pasa por la posición de equilibrio (x = 0) moviéndose hacia la derecha. Represente gráficamente x(t) para dos periodos de oscilación.

   Solución: a) La expresión de la frecuencia es:

   $$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0,4}} = 0,796\,\text{s}^{-1}$$

   La velocidad de la masa al pasar por la posición de equilibrio es: $v = A\omega\cos(\omega\,t + \phi_0)$. Si tenemos en cuenta, además que cuando t = 0 se cumple que x = 0, el valor de ϕ_0 será nulo. Así pues:

   $$1 = A \cdot 2\pi \cdot 0,796\ \cos 0 = 5A \rightarrow A = \frac{1}{5} = 0{,}2\ \text{m}$$



b) La posición del centro de M será:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega \text{t} + \phi_0) = 0,2\,\text{sen}\,(5\text{t})$$

La representación gráfica será la siguiente:

4. **(Aragón, Sept. 2016)** Una partícula de masa m describe, sobre el eje x, un M.A.S. de amplitud A y frecuencia angular ω. En t = 0 pasa por la posición de equilibrio, donde tomamos x = 0. a) Escriba las ecuaciones de la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo. b) Calcule la energía potencial y cinética de la partícula en función del tiempo. c) ¿Para qué valores de t será máxima la energía potencial? ¿Y la energía cinética? Datos: m = 0,5 kg, A = 2 m, ω = 2 rad/s.

Solución: a) Las ecuaciones de posición y velocidad serán, respectivamente:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) \qquad v = a\,\omega\,\cos\,(\omega t + \varphi_0)$$

Si para t = 0, x = 0, tendremos: sen $\varphi_0 = 0$ y $\varphi_0 = 0$. Por otra parte, de los datos del enunciado se obtiene: A =2 y $\omega = 2$, con lo que las ecuaciones anteriores quedarán así:

$$x = 2\,\text{sen}\,2t \qquad v = 4\,\cos\,2t$$

b) La energía potencial es:

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}0,5\cdot 2^2(2\,\text{sen}\,2t)^2 = 4\,\text{sen}^2 2t\,\text{J}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0,5\cdot v^2 = \frac{1}{2}0,5\,(4\cos 2t)^2 = 4\cos^2 2t\,\text{J}$$

c) la energía potencial será máxima cuando sen $2t = 1$, lo cual se cumple cuando:

$$2t = (2n+1)\,\frac{\pi}{2} \qquad t = (2n+1)\,\frac{\pi}{4}\,\text{s}$$

La energía cinética es máxima cuando cos $2t$ =1, es decir:

$$2t = n\pi \qquad t = n\,\frac{\pi}{2}\,s$$

5. **(Aragón, Sept. 2016)** Dos sonidos tienen niveles de intensidad acústica de 80 dB y 40 dB, respectivamente. Calcule cuál será la relación entre sus intensidades.

Solución: Tomando los datos del enunciado, podemos poner:

$$80 = 10\,\log\,\frac{I_1}{I_0} \qquad 40 = 10\,\log\,\frac{I_2}{I_0}$$

De las anteriores expresiones se deduce:

$$10^8 = \frac{I_1}{I_0} \qquad 10^4 = \frac{I_2}{I_0}$$

Por lo que, al dividir miembro a miembro, obtenemos:

$$\frac{10^8}{10^4} = 10^4 = \frac{I_1}{I_2}$$

6. (**Asturias, Jun. 2016**.) Una partícula de 350 g de masa oscila con una amplitud de 14 cm y posee una energía mecánica de 15 J. Calcula: a) La constante recuperadora y la frecuencia de vibración. b) La energía cinética de la partícula cuando se encuentra a 4 cm de su posición de equilibrio.

   Solución: a) La energía del oscilador será: E = 1/2 KA^2. Sustituyendo valores y despejando, tendremos:

$$15 = \frac{1}{2}K \cdot 0,14^2 \rightarrow K = \frac{2 \cdot 15}{0,14^2} = 1531\,\mathrm{N/m}$$

   La frecuencia será:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1531}{0,35}} = 10,52\,\mathrm{s^{-1}}$$

   b) La energía total es igual a la suma de energías cinética y potencial:

$$E = E_c + U \rightarrow 15 = E_c + \frac{1}{2}1531 \cdot 0,04^2$$

   Despejando, obtenemos:E_c = **13,87 J**

7. (**Asturias, Jun. 2016**) Una onda armónica transversal se propaga en una cuerda según la ecuación y(x,t) =5 sen(0,2π x+20 π t) , expresada en el sistema internacional de unidades: a) Indica en qué sentido se propaga la onda. b) Determina el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación. c) Calcula el valor máximo de la velocidad y de la aceleración.

   Solución: a) La onda se propaga en el sentido negativo del eje X, debido al signo positivo del sumando $0,2\pi x$.
   b)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,2 \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0,2} = 20\pi\,\mathrm{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 20\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{20\pi} = 0,1\,\mathrm{s}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{20\pi}{0,1} = 200\pi\,\mathrm{m/s}$$

   c) La velocidad será:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[5sen(0,2\pi x + 20\pi t)]}{dt} = 100\pi\,\cos(0,2\pi x + 20\pi t)$$

   La velocidad máxima será: v = **100π m/s**

   La aceleración será:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(100\pi\,\cos(0,2\pi x + 20\pi t)}{dt} = -2000\pi^2\,\mathrm{sen}\,(0,2\pi x + 20\pi t)$$

   Con lo que la aceleración máxima será: a = **2000π^2 m/s^2.**

8. **(Asturias, Jul. 2016)** Cuando una masa de 250 g está suspendida de un muelle, este se deforma 5 cm. a) Calcula la constante elástica del muelle. b) A continuación, separamos el muelle 10 cm de la posición de equilibrio y lo dejamos en libertad. En esas condiciones, calcula la frecuencia, la frecuencia angular y la amplitud del movimiento armónico simple que describe la masa.

Solución: a) La constante elástica del muelle se obtiene de:

$$mg = Kx \quad k = \frac{mg}{x} = \frac{0,25 \cdot 9,8}{0,05} = 49\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

b) La amplitud del movimiento coincide con la separación de la masa respecto a la posición de equilibrio, es decir, A = 0,1 m. la frecuencia angular, o pulsación, será:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{49}{0,25}} = 14\,\mathrm{s^{-1}} \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 2,29\,\mathrm{s^{-1}}$$

9. **(Asturias, Jul. 2016)** Una onda armónica se propaga por una cuerda en sentido positivo del eje X con una velocidad de 5 m/s. Su frecuencia es de 20 Hz y su amplitud 3 cm. a) Escribe la ecuación de la onda, expresando todas las magnitudes en el sistema internacional. b) Determina las ecuaciones de velocidad de vibración de una partícula de la cuerda, así como su aceleración.

Solución: a) Los parámetros de la onda serán los siguientes:

$$\omega = 2\pi\nu = 40\pi\,\mathrm{s^{-1}};\ \mathrm{A} = 0,03\,\mathrm{m};\ \mathrm{k} = \frac{\omega}{\mathrm{v}} = \frac{40\pi}{5} = 8\pi$$

Con lo que la ecuación de la onda será:

$$y = 0,03\,\mathrm{sen}\,(40\pi t - 8\pi x)$$

b) La velocidad y la aceleración de una partícula serán, respectivamente::

$$v = \frac{dy}{dt} = 1,2\pi\cos(40\pi t - 8\pi x) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -48\pi^2\,\mathrm{sen}\,(40\pi \mathrm{t} - 8\pi \mathrm{x})$$

10. **(Asturias, Jul. 2016)** Una partícula describe un movimiento armónico simple en el que la elongación, expresada en el Sistema Internacional, viene dada por la ecuación: x = 3 sen(10π t + π/2) a) Determina la elongación en el instante t = 3 s. b) Calcula las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración.

Solución: Para t = 3 s, la elongación será:

$$x_3 = 3\,\mathrm{sen}\left(30\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 3\,\mathrm{m}$$

b) Las ecuaciones de velocidad y aceleración serán, respectivamente:

$$v = \frac{dy}{dt} = 30\pi\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -900\pi^2\,\mathrm{sen}\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

11. **(Baleares, Jun. 2016)** Un movimiento armónico simple de 440 Hz y 2,0 cm de amplitud se propaga por una cuerda tensa a una velocidad de 1 450 m/s. Determine: a) La ecuación de este movimiento armónico simple. b) La ecuación de la onda generada, considerando que se propaga en el sentido positivo del eje OX. c) La ecuación del movimiento de un punto de la cuerda que se encuentra a 3;0 m de donde se origina la onda.

Solución: a) La pulsación es: $\omega = 2\pi\nu = 440 \cdot 2\pi = 880\pi$ Hz, con lo que la ecuación del MAS es:

$$y = 0,02\,\mathrm{sen}\,(880\pi \mathrm{t} + \varphi)$$

Puesto que no tenemos ningún dato que nos permita determinar el valor de φ, elegimos y = 0 para t = 0, con lo que la fase inicial tendrá el valor cero.

b) La ecuación de la onda que se propaga en el sentido positivo del eje X es del tipo:

$$y = \mathrm{A\,sen}\,(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kx} + \varphi)$$

El valor de k es: $\mathrm{k} = 2\pi/\lambda = 2\pi/vT = \omega/v = 880/1450 = 1,90\ \mathrm{m}^{-1}$. Así pues, la ecuación de la onda queda como:

$$y = 0,02\,\mathrm{sen}\,(880\pi\mathrm{t} - 1,90\mathrm{x})$$

c) La ecuación se obtendrá de la anterior sustituyendo x por 3 m, quedando así:

$$y = 0,02\,\mathrm{sen}\,(880\pi\mathrm{t} - 5,70)$$

12. **(Baleares, Jun. 2016)** Un cuerpo de 7,0 g describe un movimiento armónico simple de amplitud 10,0 cm y frecuencia 3,0 Hz. Sin considerar otras fuerzas que la elástica, ¿para qué valor de la elongación se igualan las energías potencial y cinética de este cuerpo?

Solución: La energía total de un MAS es:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{KA}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Kx}^2 + \mathrm{E_c}$$

Al ser iguales las energías cinética y potencial, tendremos:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = Kx^2 \longrightarrow x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm 7,07\,\mathrm{cm}$$

13. (**Canarias, Jun. 2016**) Una partícula de 100 g de masa sujeta a un muelle, se desplaza hacia la derecha de su posición de equilibrio 2 cm. A continuación se suelta y comienza a oscilar armónicamente a lo largo del eje OX con una frecuencia de 4 s‚1. Determine: a) Las ecuaciones de la posición y de la velocidad de la partícula, en cualquier instante de tiempo. b) El período de oscilación de la partícula, su aceleración máxima y la fuerza máxima que actúa sobre la misma. c) La constante elástica del muelle así como la energía cinética, la energía potencial y la energía total de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio.

Solución: La amplitud de oscilación será de 0,02 m y la frecuencia, de 4 s^{-1}. Si suponemos que para un tiempo 0 la partícula se encuentra en el punto de máxima elongación, podremos poner que: 0,02 = 0,02 sen ϕ_0 , con lo que $\phi_0 = \pi/2$. Las ecuaciones de posición y velocidad serán:

$$x = 0,02\,\mathrm{sen}\,\left(8\pi\mathrm{t} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,16\pi\cos\left(8\pi\mathrm{t} + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) El periodo de oscilación será:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{4} = 0,25\,\mathrm{s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo, es decir:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left[0,16\pi\cos\left(8\pi\mathrm{t} + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{dt} = -1,28\pi^2\,\mathrm{sen}\,\left(8\pi\mathrm{t} + \frac{\pi}{2}\right)$$

La aceleración máxima será: $a_{máx} = 12,63\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
La fuerza máxima será: $F_{máx} = m \cdot a_{máx} = 0,1 \cdot 12,63 =$ **1,263 N**
c) La constante elástica del muelle será:

$$K = m\omega^2 = 0,1(8\pi)^2 = 63,16\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

La energía del oscilador será:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

Siendo el primer sumando de la derecha la energía cinética, y el segundo, la energía potencial. Para x = 0, tendremos:

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}63,16 \cdot 0,02^2 = 0,0126\,\mathrm{J}$$

Con lo que la energía cinética al pasar por la posición de equilibrio será igual a la energía total del oscilador.

14. (**Cantabria, Jun. 2016**) En una cuerda se propaga una onda armónica cuya ecuación, expresada en unidades del SI, viene dada por la ecuación:

$$y(x,t) = 10\,\mathrm{sen}\left[2\pi\left(\frac{\mathrm{t}}{9} - \frac{\mathrm{x}}{6}\right)\right]$$

a) Hallar la amplitud, el período, la frecuencia y la longitud de onda de dicha onda. b) Hallar la velocidad de propagación de la onda.

Solución: a) La amplitud es: **A = 10 m**. Para hallar el resto de los parámetros, tendremos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{9} \rightarrow T = 9\,\mathrm{s} \qquad \nu = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\,\mathrm{s}^{-1} \qquad \mathrm{k} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{6} \rightarrow \lambda = 6\,\mathrm{m}$$

b) La velocidad es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6}{9} = 0,667\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

15. (**Cantabria, Jun. 2016**) Un oscilador armónico está formado por un muelle de constante elástica 20 N m^{-1} y un cuerpo sólido de masa 0.5 kg. a) Si el desplazamiento del cuerpo unido al muelle viene descrito por la ecuación x(t) = 5 cos (ωt + ϕ), hallar los valores de ω y de ϕ sabiendo que en el instante inicial t = 0 su posición es nula x (t = 0) = 0 m. b) Hallar la energía cinética que tiene el cuerpo en el punto central de la oscilación.

Solución: a) Si para t = 0 la elongación es nula, podremos poner:

$$0 = 5\,\mathrm{cos}\phi \quad \mathrm{Por\,lo\,que:} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

La pulsación se calcula de la forma:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} = 6,32\,\mathrm{s}^{-1}$$

b) El el punto central (x = 0), la energía cinética coincide con la energía total del oscilador, pues la energía potencial, $U = 1/2Kx^2 = 0$, Por tanto:

$$E_c = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}6,32 \cdot 5^2 = 79\,\mathrm{J}$$

16. (**Castilla La Mancha, Jun. 2016**) Una onda viajera que se propaga por un medio elástico está descrita por la ecuación:

$$y(x,t) = 2 \cdot 10^{-3}\mathrm{sen}\,(5\pi x - 4000\pi t + \pi/6)$$

Las unidades de x son metros, las de t son segundos y las de la amplitud son milímetros. a) Calcular su frecuencia, su periodo, su longitud de onda y su velocidad de propagación. b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos puntos del medio separados una distancia de 10 cm? ¿Cuánto cambia la fase de una partícula del medio al cabo de una milésima de segundo? c) Calcular la elongación y la velocidad de vibración de una partícula del medio situada en el origen de coordenadas en el instante t = 0.

Solución: a) La frecuencia,el periodo la longitud de onda y la velocidad de propagación se calculan respectivamente de la forma:

$$\omega = 4000\pi = 2\pi\nu \rightarrow \nu = 2000\,\mathrm{s}^{-1} \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{\nu} = 5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$$

$$k = 5\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 0,4\,\mathrm{m} \qquad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,4}{5\cdot 10^{-4}} = 800\,\mathrm{m/s}$$

b) Para hallar la diferencia de fase, utilizamos la reacción:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\Delta\phi} \quad \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 0,1}{0,4} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$$

En 1/1000 s, la onda recorre un espacio; $\Delta x = 800/1000 = 0,8\,\mathrm{m}$, que equivale a dos longitudes de onda. La diferencia de fase será, pues:

$$\Delta\phi = 2\cdot 2\pi = 4\pi\,\mathrm{rad}$$

c) Para t = 0 y x = 0, la elongación será:

$$y(x,t) = 2\cdot 10^{-3}\mathrm{sen}\,(\pi/6) = 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

(Se ha supuesto que la amplitud es 0,002 m, correspondiente a 2 mm). La velocidad se obtiene derivando la elongación respecto del tiempo. Por tanto, para t = 0y x = 0, tendremos:

$$v = \frac{dx}{dt} = 4000\pi\cdot 2\cdot 10^{-3}\cos\,(\pi/6) = 21,76\,\mathrm{m/s}$$

17. (**Castilla La Mancha, Jun. 2016**) Un muelle de constante elástica k = 3 N/m sujeta una pequeña esfera cargada eléctricamente. Cuando se establece un campo eléctrico de magnitud E = 4500 V/m dirigido verticalmente hacia abajo, la esfera alcanza una nueva posición de equilibrio situada más abajo que antes, a una distancia y = 2.4 cm . a) Calcular la carga de la esfera y explicar razonadamente qué signo tiene. b) Cortamos el hilo que sujeta la esfera y se observa que ésta cae (dentro del campo eléctrico) con una aceleración de 13 m$\cdot s^{\cdot -2}$. Calcular la masa de la esfera. c) Si en lugar de cortar el hilo eliminamos repentinamente el campo eléctrico, la esfera empezará a oscilar. Explicar por qué y hallar el periodo de oscilación.

Solución: a) La fuerza vertical ejercida por el campo eléctrico sobre la esfera es: F = qE, que, en la posición de equilibrio, se iguala a la fuerza Ky (suponiendo despreciable la masa de la esfera). Así pues, podremos poner:

$$qE = Ky \rightarrow 4500q = 3\cdot 0,024$$

Despejando, obtenemos que la carga es: $q = 1,6\cdot 10^{-5}$ **C**. La carga tiene signo positivo al desplazarse en el mismo sentido que el campo eléctrico aplicado.

b) Cuando se corta el hilo, la fuerza que actúa sobre la esfera es la suma de su peso y la fuerza debida al campo eléctrico, es decir:

$$mg + qE = ma \qquad 9,8m + 1,6\cdot 10^{-5}\cdot 4500 = 13m \quad \mathrm{Por\,lo\,que:} \quad \mathrm{m} = 0,0225\,\mathrm{kg}$$

Como puede verse, el peso de la esfera **no puede considerarse despreciable** con respecto a la fuerza debida al campo eléctrico. Por ello, el apartado a) del problema debería plantearse de la siguiente forma:

$$qE + mg = Ky$$

Sustituyendo en esta igualdad los valores del enunciado y la masa obtenida en el apartado b), tendremos:

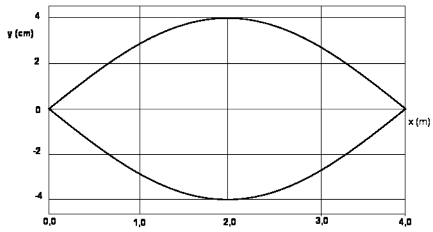
$$q \cdot 4500 + 0,0225 \cdot 9,8 = 3 \cdot 0,024 \qquad q = \frac{3 \cdot 0,024 - ,0225 \cdot 9,8}{4500} = -2,9 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$$

Podemos ver que, aunque la esfera tendería a moverse verticalmente hacia arriba, debido a la fuerza ejercida por el campo eléctrico, su peso, al ser superior a la mencionada fuerza, la haría desplazarse verticalmente hacia abajo.

c) La única fuerza que actuará sobre la esfera será su peso. Al estar la esfera unida al muelle y encontrarse separada de la posición de equilibrio, comenzará a oscilar alrededor de ésta, con un periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,0225}{3}} = 0,544\,\mathrm{s}$$

18. **(Castilla la Mancha, Sept. 2016)** En una cuerda tensa de 4 m de longitud sujeta por ambos extremos se excita el primer armónico de una onda estacionaria, el cual presenta el aspecto visual que se muestra en el esquema.



La ecuación de onda es:

$$y = 0,04\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos 32\pi t$$

Donde x e y están en m y t en s. a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas transversales en esta cuerda? ¿cuánto tiempo tarda la cuerda en una oscilación completa? b) ¿Con qué amplitud vibra la cuerda en el punto situado en la posición x = 1 m de la figura? ¿cuál es la máxima velocidad de vibración en ese punto? c) Calcular la frecuencia y longitud de onda del segundo armónico y escribir su ecuación, suponiendo que la amplitud se mantiene invariable.

Solución: a) De la ecuación de la onda estacionaria del enunciado, se deducen los valores:

$$K = \frac{\pi}{4} \quad \mathrm{y} \quad \omega = 32\pi$$

La velocidad de propagación se obtiene de la siguiente forma:

$$v = \frac{\omega}{K} = \frac{32\pi}{\pi/4} = 128\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{32\pi} = 0,0625\,\mathrm{s}$$

b) La amplitud en el punto x = 1 es:

$$A_r = 0,04\,\mathrm{sen}\frac{\pi \cdot 1}{4} = 0,0283\,\mathrm{m}$$

La velocidad será:

$$v = \frac{dy}{dt} = -0,04\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} \cdot 32\pi\,\mathrm{sen}\,32\pi\mathrm{t}$$

El valor máximo se dará cuando sen 32πt = 1, por lo cual:

$$v_{máx} = 0,0283 \cdot 32\pi = 2,84\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

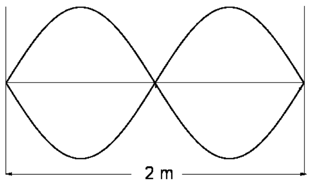
c)

$$\lambda = \frac{2L}{n} = \frac{2L}{2} = 4\text{m} \longrightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}\,\text{m}^{-1} \quad \nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{128}{4} = 32\,\text{s}^{1} \longrightarrow \omega = 2\pi\nu = 64\pi\,\text{s}^{-1}$$

La ecuación de este armónico será:

$$y = 0,04\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\,x\,\cos\,64\pi t$$

19. **(Castilla la mancha, Sept. 2016)** Estudiamos una onda estacionaria en una cuerda tensa de 2 m de longitud fija por ambos extremos, en la cual la velocidad de propagación de las ondas transversales es 34 m/s. La onda estacionaria está representada en la figura.



¿De qué armónico se trata? ¿Cuál es su frecuencia? Contestar razonadamente.

Solución: Puesto que existen tres nodos, y y teniendo en cuenta que nº nodos = n + 1, obtenemos el valor n = 2, correspondiente al segundo armónico. Para este armónico, la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{2L}{n} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2\,\text{m}$$

La frecuencia será:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{34}{2} = 17\,\text{s}^{-1}$$

20. **(Castilla y León, Jun. 2016)** La ecuación de una onda armónica unidimensional transversal es y(x,t) = 0,06 sen(20πt − 4πx + π/2), donde todas las magnitudes están expresadas en unidades S.I. Escriba la ecuación del movimiento de un punto situado en x = 0,25 m. ¿Cuál es la velocidad máxima a la que se mueve dicho punto?

Solución: para x = 0,25 m, la ecuación de la onda es:

$$\text{y(t)} = 0,06\,\text{sen}\,(20\pi\text{t}–\pi + \pi/2) = 0,06\,\text{sen}\,(20\pi\text{t}–\pi/2)$$

La velocidad es la derivada de y con respecto a t, es decir:

$$\text{v} = \frac{\text{dy}}{\text{dt}} = 1,2\pi\cos\,(20\pi\text{t} - \pi/2) \qquad \text{La velocidad máxima es :} \quad \text{v}_{\text{máx}} = 1,2\pi\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

21. **(Castilla y León, Jun. 2016)** Un extremo de una cuerda larga se somete a un movimiento armónico simple de frecuencia 3,5 Hz, lo que genera una perturbación ondulatoria que tarda 3 s en llegar a un punto de la cuerda situado a 7 m de dicho extremo. Determine: a) La longitud de onda del movimiento ondulatorio. b) La diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda que distan 7 m entre sí.

Solución: a) La velocidad de propagación de la perturbación será: v = 7/3 m/s. La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{7/3}{3,5} = \frac{2}{3}\,\mathrm{m}$$

b) Para calcular la diferencia de fase, establecemos la siguiente relación:

$$\frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{\mathrm{x\,rad}} = \frac{2/3\,\mathrm{m}}{7\,\mathrm{m}}$$

Obteniéndose x = **21**π radianes

22. **(Castilla y León, Sept. 2016)** Un objeto de masa 200 g está unido a un muelle de constante elástica k = 20 N m^{-1} y oscila con una amplitud de 5 cm sobre una superficie horizontal sin rozamiento. a) Calcule la velocidad del objeto cuando la elongación sea 2 cm. b) ¿Para qué valor de la elongación la energía cinética es el doble de la energía potencial elástica?

Solución: a) Para conocer la velocidad, deberemos conocer previamente la ecuación que nos da la posición en función del tiempo, cuya expresión es: x = A sen (ω t + φ). Por otra parte, el valor de la pulsación, ω, es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 10\,\mathrm{s}^{-1}$$

Si suponemos que x = 0 para t = 0, tendremos que φ = 0. La posición de la partícula vendrá expresada por: x = 0,05 sen 10 t. La velocidad es:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,05 \cdot 10 \cos 10\,t$$

Para x = 0,02 m, podremos poner que 0,02 = 0,05 sen 10 t, con lo que sen 10 t = 0,4 y cos 10 t = $\sqrt{1-0,4^2}$ = 0,916. Así pues, la velocidad en este punto será:

$$v = 5 \cdot 0,916 = 0,458\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) Cuando la energía cinética sea doble que la energía potencial, podremos poner:

$$E_c = 2\left(\frac{1}{2}Kx^2\right)$$

Aplicando la expresión de la energía del oscilador:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = E_c + U = 2\left(\frac{1}{2}Kx^2\right) + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\frac{3}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}K \cdot 0,05^2 \qquad x = \frac{0,05}{\sqrt{3}}\,\mathrm{m}$$

23. (**Cataluña, Jun. 2016**) Tenemos dos muelles idénticos. Un objeto A de 100 g que cuelga de uno de los muelles oscila con un período de 1,00 s y con una amplitud de 5,00 cm. a) Queremos que el otro muelle oscile con la misma amplitud, pero con una frecuencia doble que la del muelle del que cuelga el objeto A. ¿Qué masa debemos colgar del segundo muelle? b) Los dos objetos se liberan desde el extremo inferior de la oscilación. Representa en una gráfica velocidad-tiempo la velocidad de cada uno de los objetos cuando oscilan durante 2 s en las condiciones descritas. En la gráfica debes indicar claramente las escalas de los ejes, las magnitudes y las unidades. Durante los 2 s representados en la gráfica, ¿en qué instantes la diferencia de fase entre los dos objetos es de π radianes?

Solución: a) En primer lugar, debemos hallar la constante del muelle, a partir de la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \text{Sustituyendo valores :} \quad 1 = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{K}}$$

Lo que nos da un valor de K = 3,95 N/m.
Si la frecuencia del segundo oscilador debe ser doble que la del primero, teniendo en cuenta que la frecuencia es $\nu = 1/T$, podremos poner que:

$$\frac{1}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3,95}}$$

Lo que nos da una masa: **m = 0,025 kg**.
b) A partir de la ecuación general, $y = Asen(\omega t + \phi)$, sabiendo que para t = 0, tanto y_1 como y_2 tienen el valor 0,05, tendremos que:

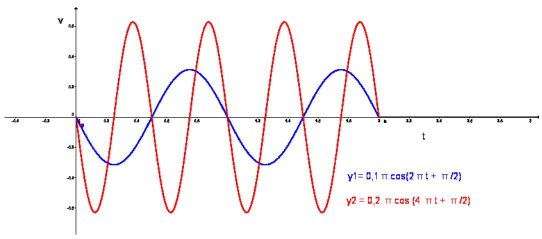
$$0,05 = 0,05\,\text{sen}\,\phi_0 \qquad \text{Por lo que :} \qquad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

La ecuación del movimiento para cada uno de los cuerpos es la siguiente:

$$y_1 = A\,\text{sen}\,(\omega_1 t + \phi_0) = 0,05\,\text{sen}\,(2\pi t + \pi/2) \longrightarrow v_1 = \frac{dx}{dt} = 0,1\pi\cos\,(2\pi t + \pi/2)$$

$$y_2 = A\,\text{sen}\,(\omega_2 t + \phi_0) = 0,05\,\text{sen}\,(4\pi t + \pi/2) \longrightarrow v_1 = \frac{dx}{dt} = 0,2\pi\cos\,(4\pi t + \pi/2)$$

La representación gráfica velocidad-tiempo es la siguiente: En el eje de ordenadas, se representa



la velocidad en m·s^{-1},mientras que en el eje de abscisas se representa el tiempo, expresado en segundos. La diferencia de fase entre los dos objetos corresponderá al instante t = 0,5;

24. (**Cataluña, Jun. 2016**) Los murciélagos emiten ultrasonidos y utilizan los ecos de estos ultrasonidos para orientarse y para detectar obstáculos y presas. Una especie de murciélagos emite ultrasonidos con una frecuencia de 83,0 kHz cuando caza mosquitos. a) Calcula la longitud de onda y el período de los ultrasonidos emitidos por estos murciélagos. Considera un mosquito situado a 1,5000 m de la oreja derecha y a 1,5030 m de la oreja izquierda del murciélago. Calcula la diferencia de fase en el eco percibido por cada oreja, procedente del mosquito. b) Cuando el mosquito está más cerca, el el murciélago también podría utilizar la diferencia de intensidad de los ecos. Calcula el cociente de intensidades sonoras cuando el mosquito está a 33 cm de la oreja derecha y a 34 cm de la oreja izquierda y expresa en decibelios la diferencia de niveles de intensidad sonora. Considera que el eco se propaga uniformemente desde el mosquito en todas las direcciones del espacio. Dato: Velocidad de los ultrasonidos en el aire = 340 m s^{-1}.

Solución: a) La longitud de onda y el periodo del ultrasonido son, respectivamente:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340}{8,3\cdot 10^4} = 4,1\cdot 10^{-3}\,\text{m} \qquad\qquad T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{8,3\cdot 10^4} = 1,2\cdot 10^{-5}\,\text{s}$$

Para calcular la diferencia de fase del eco percibido por cada oreja del murciélago, utilizamos la relación:

$$\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\Delta\phi}{\Delta x}\rightarrow\Delta\phi=\frac{2\pi\cdot(1,5000-1,5030)}{4,1\cdot10^{-3}}=1,46\text{ rad}$$

b) La intensidad del ultrasonido emitido es:

$$I=\frac{P}{S}=\frac{P}{4\pi r^2}$$

Aplicando esta relación, tendremos:

$$I_1=\frac{P}{S_1}=\frac{P}{4\pi r_1^2}=\frac{P}{4\pi 0,33^2}\qquad \text{y} \qquad \mathrm{I}_2=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}_2}=\frac{\mathrm{P}}{4\pi\mathrm{r}_2^2}=\frac{\mathrm{P}}{4\pi 0,34^2}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{\dfrac{P}{4\pi 0,33^2}}{\dfrac{P}{4\pi 0,34^2}}=\frac{0,34^2}{0,33^2}=1,06$$

A partir de la expresión que nos da el nivel de intensidad:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}$$

tendremos que:

$$\frac{I}{I_0}=10^{\beta/10}\quad \text{Con lo que}:\ \frac{\dfrac{I_1}{I_0}}{\dfrac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_0}}=\frac{1,06\ I_2}{\mathrm{I}_2}=\frac{10^{\beta_1/10}}{10^{\beta_2/10}}=10^{(\beta_1-\beta_2)/10}$$

Tomando logaritmos decimales:

$$log\,1,06=\frac{\beta_1-\beta_2}{10}\quad \text{y}\quad \beta_1-\beta_2=0,25\,\text{dB}$$

25. **(Cataluña, Sept. 2016)** Un tubo de un órgano de la basílica de la Sagrada Familia está abierto por los dos extremos y mide 1,0 m de longitud. a) Calcule las frecuencias y las longitudes de onda de las ondas estacionarias que pueden propagarse por este tubo. b) Si el tubo estuviera lleno de helio, el sonido se propagaría a una velocidad de 975,0 m s^{-1}. En este caso, ¿cuáles serían las frecuencias? Dato: Velocidad del sonido en el aire = 343,0 m s^{-1}.

Solución: a) Las frecuencias que pueden propagarse por un tubo de este tipo responden a la expresión:

$$\nu=\frac{nv}{2L}$$

Siendo n un número natural, v la velocidad del sonido y L, la longitud del tubo. La frecuencia fundamental tendrá el valor:

$$\nu_0=\frac{343,0}{2\cdot1}=171,5\,\text{Hz}$$

Por tanto se pueden emitir, además de esta frecuencia fundamental, múltiplos enteros de la misma. Las longitudes de onda responden a la expresión:

$$\lambda=\frac{2L}{n}$$

Siendo la longitud de onda fundamental:

$$\lambda_0=\frac{2L}{n}=2\,\text{m}$$

b) Si el tubo estuviera lleno de helio, la frecuencia fundamental y la longitud de onda fundamental tendrían los valores respectivos:

$$\nu_0 = \frac{975,0}{2} = 487,5\,\text{Hz} \qquad \lambda_0 = 2\,\text{m}$$

26. **(Cataluña, Sept. 2016)** Las boyas marinas se utilizan a menudo para medir la altura del oleaje. Una de estas boyas se mueve siguiendo una oscilación armónica de 3,00 m de amplitud y 0,10 Hz de frecuencia y la onda se propaga a la velocidad de 0,50 m s^{-1}. a) Calcule la longitud de onda y el número de onda. b) Escriba la ecuación de las ondas que mueven la boya suponiendo que la fase inicial es cero.

Solución: Con los datos del enunciado, podremos poner: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0,1 = 0,2\pi$ s^{-1} , $\lambda = v$ $/\nu = \dfrac{0,5}{0,1} =$ 5 m y k $= \dfrac{2\pi}{\lambda} = 0,4\pi\,\text{m}^{-1}$
b) La ecuación de las ondas es:

$$y = A\,\text{sen}\,(\omega t - kx) = 3\,\text{sen}\,(0,2\pi\text{t} - 0,4\pi x)$$

27. (**Extremadura, Jun. 2016**) Un oscilador armónico vibra de forma que inicialmente se encuentra a 4,0 cm de la posición de equilibrio. Si la frecuencia del movimiento es de 2,0 Hz y su amplitud 8 cm, calcula: a) La fase inicial. b) La velocidad inicial.

Solución: a) La ecuación de la onda es:

$$x = 0,08\,\text{sen}\,(2 \cdot 2\pi\text{t} + \phi_0)$$

Si para t = 0, x = 0,04 m, tendremos:

$$0,04 = 0,08\,\text{sen}\,\phi_0 \longrightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6}$$

b) La velocidad será:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,32\,\pi\cos\left(4\pi t + \pi/6\right) \quad \text{Para}\,\text{t} = 0: \quad \text{v} = 0,32\,\pi\cos\pi/6 = 0,87\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

28. (**Extremadura, Jun. 2016**) Una onda se propaga de acuerdo a la ecuación $y(x,t) = 3\,\text{sen}\,(20\pi\text{t} - 50\pi\text{x})$, medida en el S.I. Un punto es alcanzado por la onda a 0,5 m del foco. En el instante t = 2 s, determina: a) Su elongación. b) Su velocidad de vibración.

Solución: a) la elongación será:

$$y = 3\,\text{sen}\,(20\pi \cdot 2 - 50\pi \cdot 0,5) = 0\,\text{m}$$

b) La velocidad es:

$$v = \frac{dy}{dt} = 60\pi\cos\left(20\pi \cdot 2 - 50\pi \cdot 0,5\right) = -60\pi\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

29. **(La Rioja, Jul. 2016)** Una onda sinusoidal avanza con una velocidad de 50 m/s. La amplitud de la onda es de 5 cm y su frecuencia es de 100 Hz. Suponiendo que en el origen x = 0 y en el instante inicial, t = 0, la elongación es cero, determinar: a) La longitud de onda del movimiento. b) La ecuación del movimiento. c) La elongación, velocidad y aceleración de un punto que dista del origen 500 cm en t = 0,1 s..

Solución: a) La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{50}{100} = 0,5\,\mathrm{m}$$

b) Los parámetros del movimiento son los siguientes:

$$A = 0,05\,m;\ \omega = 2\pi \cdot 100 = 200\pi\,s^{-1};\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi\,m^{-1}$$

Comoquiera que para x = 0 y t = 0 la elongación es nula, la fase inicial (φ_0) será nula. la ecuación del movimiento quedará así:

$$y = 0,05\,\mathrm{sen}\,(200\pi\mathrm{t} - 4\pi\mathrm{x})$$

c) La elongación, velocidad y aceleración del punto indicado será las siguientes:

$$y = 0,05\,\mathrm{sen}\,(20\pi - 20\pi) = 0\,\mathrm{m}$$

$$v = \pi\cos\,(20\pi - 20\pi) = \pi\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$a = -20\pi^2\,\mathrm{sen}\,(20\pi - 20\pi) = 0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

30. (**Madrid, Jun. 2016**) Un bloque de 2 kg de masa, que descansa sobre una superficie horizontal, está unido a un extremo de un muelle de masa despreciable y constante elástica 4,5 N m^{-1}. El otro extremo del muelle se encuentra unido a una pared. Se comprime el muelle y el bloque comienza a oscilar sobre la superficie. Si en el instante t = 0 el bloque se encuentra en el punto de equilibrio y su energía cinética es de 0,90$\cdot 10^{-3}$ J, calcule, despreciando los efectos del rozamiento: a) La ecuación del movimiento x(t) si, en t = 0, la velocidad del bloque es positiva. b) Los puntos de la trayectoria en los que la energía cinética del bloque es 0,30$\cdot 10^{-3}$ J.

Solución: a) En la posición de equilibrio, la energía cinética coincide con la energía total del oscilador. Así pues, podemos poner:

$$\frac{1}{2}KA^2 = E_c \qquad \frac{1}{2}4,5\cdot A^2 = 9\cdot 10^{-4} \qquad \mathrm{Despejando,\,se\,obtiene:}\ A = 0,02\,\mathrm{m}$$

La pulsación será:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{4,5}{2}} = 1,5\,\mathrm{s}^{-1}$$

la ecuación del movimiento será del tipo: $x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi_0)$. Puesto que para t = 0, x = 0, tendremos:

$$0 = \mathrm{sen}\,\phi_0 \longrightarrow \phi_0 = 0$$

Finalmente, la ecuación del movimiento queda así:

$$x = 0,02\,\mathrm{sen}\,(1,5\pi t)$$

b) Para estos puntos, se cumplirá que:

$$3\cdot 10^{-4} = \frac{1}{2}2\,v^2 \longrightarrow v = 1,73\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 0,02\cdot 1,5\pi\cos 1,5\pi\mathrm{t}$$

Despejando, se obtiene:

$$\cos 1,5\pi t = \frac{1,73\cdot 10^{-2}}{0,03\pi} = 0,183 \Rightarrow \mathrm{sen}\,1,5\pi t = \sqrt{1 - 0,183^2} = 0,983$$

Por lo que cumplirán esta condición los puntos que se encuentren a una distancia de la posición de equilibrio:

$$x = 0,02\cdot\mathrm{sen}\,1,5\pi t = 0,02\cdot 0{,}983 = 0,0197\,\mathrm{m}$$

31. (**Madrid, Jun. 2016**) Una onda transversal se propaga a lo largo de una cuerda tensa. En un cierto instante se observa que la distancia entre dos máximos consecutivos es de 1 m. Además, se comprueba que un punto de la cuerda pasa de una elongación máxima a nula en 0,125 s y que la velocidad máxima de un punto de la cuerda es de 0,24π m s^{-1}. Si la onda se desplaza en el sentido positivo del eje X, y en t = 0 la velocidad del punto x = 0 es máxima y positiva, determine: a) La función de onda. b) La velocidad de propagación de la onda y la aceleración transversal máxima de cualquier punto de la cuerda.

Solución: a) La longitud de onda será: $\lambda = 1$ m. Para que un punto de la cuerda pase de una elongación máxima a otra nula, debe transcurrir un tiempo igual a la cuarta parte del periodo, es decir: $T = 4 \cdot 0,125 = 0,5$ s. Con este dato, podemos hallar la pulsación: $\omega = 2\pi\ /\mathrm{T} = 4\pi\ \mathrm{s}^{-1}$.

La velocidad máxima tendrá la expresión:

$$v_{max} = A \cdot \omega \qquad \text{Por tanto :} \qquad 0,24\pi = \mathrm{A} \cdot 4\pi \text{ y } \mathrm{A} = 0,06$$

Al ser la elongación nula para t = 0, tendremos que $\phi_0 = 0$, con lo que, finalmente, la función de onda será:

$$y = 0,06\,\mathrm{sen}\,(4\pi t - 2\pi x)$$

b) La velocidad de propagación de la onda será:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{0,5} = 2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

La aceleración transversal máxima vale:

$$a_{max} = A\omega^2 = 0,06 \cdot (4\pi)^2 = 9,47\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

32. **(Madrid, Sept. 2016)** Un cuerpo que se mueve describiendo un movimiento armónico simple a lo largo del eje X presenta, en el instante inicial, una aceleración nula y una velocidad de -5 $\vec{i}$ cm s^{-1}. La frecuencia del movimiento es 0,25 Hz. Determine: a) La elongación en el instante inicial. Justifique su respuesta. b) La expresión matemática que describe la elongación del movimiento en función del tiempo.

Solución: a) La elongación viene expresada por: x = A sen (ωt + φ), la velocidad es : $v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi)$mientras que la expresión de la aceleración es: a = A ω^2sen (ωt + φ) = $-\omega^2$x. Si la aceleración para un tiempo dado es nula, la elongación también lo será. Teniendo en cuenta que la pulsación es: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0,25 = 0,5\pi$, podremos plantear lo siguiente:

$$0 = \mathrm{a} = \mathrm{A}\,0,25\pi^2\mathrm{sen}\,(\varphi_0)$$
$$-0,05 = v = -0,5\pi A\,\cos(\varphi_0)$$

De la primera expresión se deduce que $sen\,\varphi_0 = 0$ y, por tanto, $\varphi_0 = 0$ y $\cos\varphi_0 = 1$. Así pues, podemos despejar la amplitud:

$$A = \frac{-0,05}{-0,5\pi} = \frac{0,1}{\pi}\,\mathrm{m}$$

La elongación en el instante inicial será:

$$x = A\,sen\,(\omega t + \varphi) = \frac{0,1}{\pi}\,\mathrm{sen}\,0 = 0\,\mathrm{m}$$

b) La expresión matemática será:

$$x = \frac{0,1}{\pi}\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

33. **(Madrid, Sept. 2016)** Una onda armónica transversal se desplaza en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 5 m s^{-1} y con una frecuencia angular de $\pi/3$ rad s^{-1}. Si en el instante inicial la elongación en el origen de coordenadas es $3/\pi$ cm y la velocidad de oscilación es -1 cm s^{-1}, determine: a) La función de onda. b) La velocidad de oscilación en el instante inicial a una distancia del origen igual a media longitud de onda.

Solución: a) La ecuación de la onda tendrá la forma: y = A sen (ωt - kx-+φ_0), mientras que la velocidad será: v = dy/dt = Aω cos (ωt - kx-+φ_0). De los datos del enunciado podemos deducir lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3}{\pi} = A\,\mathrm{sen}\,\varphi_0 \\ 0,01 = A\cdot\dfrac{\pi}{3}\cos\,\varphi_0 \end{array}\right\}$$

Dividiendo miembro a miembro, nos quedará:

$$\frac{3}{0,01\pi} = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\varphi_0}{\pi} \longrightarrow \mathrm{tg}\,\varphi_0 = -100 \quad \mathrm{y} \quad \varphi_0 = -1,56\,\mathrm{rad}$$

$$\frac{3}{\pi} = A\,\mathrm{sen}\,(-1,56) \longrightarrow A = \frac{3}{\pi}\,\mathrm{m}$$

teniendo en cuenta, además, que $k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{\pi/3}{5} = \dfrac{\pi}{15}\,\mathrm{m}^{-1}$, la ecuación de la onda quedará así:

$$y = \frac{3}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi}{3}\,\mathrm{t} - \frac{\pi}{15}\,\mathrm{x} - 1,56\right)$$

b) La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{5}{\dfrac{\pi/3}{2\pi}} = 30\,\mathrm{m}$$

Para t = 0 y x = 15 m:

$$v = \frac{3}{\pi}\,\frac{\pi}{3}\,\cos\left(-\frac{\pi\cdot 15}{15} - 1,56\right) = -0,01\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

34. **(Navarra, Jun. 2016)** Una partícula de masa m = 200 g está unida a un muelle de constante elástica K y se apoya sobre una superficie sin rozamiento. Comienza el movimiento partiendo del reposo con una energía potencial elástica de 4 J. El periodo del movimiento es de 0,5 s. Calcular: la constante elástica, la amplitud del movimiento y la energía elástica en el instante t = 0,2 s.

Solución: La pulsación del movimiento es:$\omega = 2\pi/T. = 2\pi/0,5 = 4\pi$. El periodo viene expresado por: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$. Sustituyendo valores, tendremos:

$$0,5 = 2\pi\sqrt{\frac{0,2}{K}} \qquad \text{obteniéndose :} \qquad K = 31,58\,\mathrm{N/m}$$

La energía potencial elástica es: $4 = \frac{1}{2}KA^2$, igual que la energía total, al ser v = 0. Sustituyendo el valor de K previamente obtenido:

$$A = \sqrt{\frac{8}{31,58}} = 0,5\,\mathrm{m}$$

La ecuación del movimiento es: $y = A\,sen\,(\omega t + \varphi)$. Si para t = 0 la velocidad es nula, tendremos:

$$v = A\omega cos\,(\omega t + \varphi) \longrightarrow 0 = 0,5\cdot 4\pi\cos\,(\varphi) \quad \mathrm{y} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$$

Así pues, para t = 0,2 s:

$$\mathrm{x} = \mathrm{A\,sen}\,(\omega \mathrm{t} + \varphi) = 0,5\,\mathrm{sen}\,(0,8\pi + \pi/2) = -0,40\,\mathrm{m}$$

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}31,58(-0,40)^2 = 2,53\,\mathrm{J}$$

35. **(Navarra, Jun. 2016)** Por una cuerda se propaga una onda de ecuación:

$$\mathrm{y(x,t)} = 3\,\mathrm{sen}\,(2\mathrm{x} + 4\mathrm{t} + 2)$$

Donde x e y vienen dados en metros y t en segundos. Calcular: a) El periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda. b) La velocidad de vibración de un punto de la cuerda situado en x = 2 m cuando ha transcurrido un tiempo t = 2 s. c) La diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda separados 10 cm. d) La diferencia de fase en un punto x de la cuerda entre dos instantes con una diferencia de tiempo de 2 s.

Solución: a) El periodo tiene la expresión:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}$$

La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,\mathrm{m}$$

La velocidad de propagación tiene el valor:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{4}{2} = 2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) La velocidad de vibración es:

$$v = \frac{dy}{dt} = 3 \cdot 4\,\cos{(2x + 4t + 2)}$$

Para x = 2 m y t = 2 s, la velocidad tendrá el valor:

$$v = 3 \cdot 4\,\cos{(4 + 8 + 2)} = 1,64\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

c) Puesto que la longitud de onda es π m, La diferencia de fase puede obtenerse deduciéndola de la igualdad:

$$\frac{\pi\,\mathrm{m}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = \frac{0,1\,\mathrm{m}}{\Delta\varphi\,\mathrm{rad}} \longrightarrow \Delta\varphi = 0,2\,\mathrm{rad}$$

d) El periodo es $\pi/2$ s De forma análoga al apartado anterior, podemos poner:

$$\frac{\pi/2\,\mathrm{s}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = \frac{2\,s}{\Delta\varphi\,\mathrm{rad}} \longrightarrow \Delta\varphi = 8\,\mathrm{rad}$$

36. **(Navarra, Sept 2016)** Una partícula de 2 kg de masa describe un movimiento armónico simple en el eje X, siendo el periodo 4 segundos y la fase inicial 0,8 radianes. En el instante t = 2 s, la velocidad de la partícula es v = -3,3 m/s. a) Hallar la ecuación del movimiento en función del tiempo. b) Dibujar x frente a t en el primer periodo del movimiento, 0≤ t ≤ T, indicando en qué instantes la elongación es máxima y en qué instantes es nula. c) Calcular la energía cinética y la energía total cuando t = 1,5 s.

Solución: a) La ecuación del movimiento tiene la expresión: $x = A\,\mathrm{sen}\,(\omega \mathrm{t} + \varphi_0)$, mientras que la velocidad viene dada por:$v = A\omega\cos{(\omega \mathrm{t} + \varphi_0)}$. Conocido el periodo, la pulsación será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-,1}$$

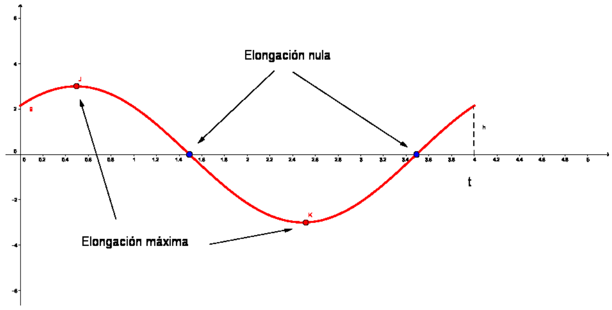
Sustituyendo, tendremos:

$$-3,3 = A \cdot \frac{\pi}{2} \cos(\pi + 0,8) \qquad \text{de donde se deduce :} \qquad A = 3\text{m}$$

la ecuación del movimiento quedará así:

$$x = 3\,\text{sen}\,(\frac{\pi}{2}\,\text{t} + 0,8)$$

b) La representación gráfica sería la siguiente:



c) Para t = 1,5 s, la velocidad será:

$$v = \frac{3\pi}{2} \cos\left(\frac{1,5\pi}{2} + 0,8\right) = -\frac{3\pi}{2}\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 2 \left(-\frac{3\pi}{2}\right)^2 = 22,21\,\text{J}$$

La energía total tendrá el valor:

$$E = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 3^2 = 22,21\,\text{J}$$

37. **(Navarra, Sept. 2016)** Una onda armónica transversal de frecuencia 2 Hz se propaga a lo largo de una cuerda en la dirección positiva del eje OX con una velocidad de 20 cm/s. En el instante inicial, t = 0, el punto x = 0 de la cuerda tiene una elongación de + 2 cm y su velocidad de oscilación es de 15 cm/s. Escribir la ecuación de la onda.

Solución: La ecuación de la onda es del tipo: $y = A\,\text{sen}(\omega t - Kx + \varphi)$. De los datos del enunciado se deduce lo siguiente;

$$\omega = 2\pi\nu = 4\pi\,\text{s}^{-1} \qquad \text{k} = \frac{\omega}{\text{v}} = \frac{4\pi}{0,2} = 20\pi\,\text{m}^{-1}$$

Por otra parte, si tenemos en cuenta la expresión de la velocidad transversal, $v = A\omega \cos(\omega t - Kx + \varphi)$, y que para x = 0 y t = 0 la elongación es y = 0,02 m y la velocidad es v = 0,15 m/s, tendremos:

$$y = 0,02 = A\,sen\varphi\;(*) \qquad v = 0,15 = A \cdot 4\pi\,cos\,\varphi$$

Dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{0,02}{0,15} = \frac{\text{tg}\,\varphi}{4\pi} \qquad \text{de dende obtenemos :} \qquad \text{tg}\,\varphi = 1,675 \text{ y } \varphi = 1,03\,\text{rad}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (*), tendremos: 0,02 = A sen 1,03, de donde se obtiene A = 0,023 m. La ecuación de la onda quedará, pues, así:

$$y = 0,023\,\text{sen}\,(4\pi\text{t} - 20\pi\text{x} + 1,03)$$

38. (**País Vasco, Jun. 2016**) Una partícula de masa m = 50 g unida a un muelle horizontal de constante K = 200 N/m se suelta después de haber sido desplazada 2 cm con respecto a su posición de equilibrio. a) Determinar el periodo y la frecuencia de oscilación de la partícula. b) Escribir la ecuación del movimiento armónico simple (MAS) correspondiente. c) Calcular la velocidad y la aceleración máximas.

Solución: a) Podemos obtener la frecuencia a partir de la expresión:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{K}{m}} \longrightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{0,05}} = 10,06\,\mathrm{s}^{-1}$$

Mientras que el periodo será el inverso de la frecuencia, estos es:

$$T = \frac{1}{10,06} \simeq 0,1\,\mathrm{s}$$

b) La amplitud del movimiento será: A = 0,02 m, y la pulsación será: . Por otra parte, para un tiempo cero, la elongación de la partícula coincide con la amplitud de oscilación, es decir, 0,02 m. Teniendo esto en cuenta, la ecuación será de la forma:

$$x = 0,02\,\mathrm{sen}\,(20,13\pi\mathrm{t} + \phi_0)$$

Puesto que para t = 0, x = 0,02, tendremos:

$$0,02 = 0,02\,\mathrm{sen}\,\phi_0 \Longrightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

La ecuación del MAS quedará finalmente así:

$$x = 0,02\,\mathrm{sen}\,(20,13\pi\mathrm{t} + \pi/2)$$

c) La velocidad será:

$$v = \frac{dx}{dt} = 0,40\pi\mathrm{cos}\,(20,13\pi\mathrm{t} + \pi/2) \qquad v_{max} = 0,40\pi\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Y la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = -8,1\pi^2\mathrm{sen}\,(20,13\pi\mathrm{t} + \pi/2) \qquad a_{max} = 8,1\pi^2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

39. **(País Vasco, Jul. 2016)** Cierta onda transversal tiene por ecuación $y = 0,2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}(3x - 30t)$ (en unidades del S.I.). a) Calcular la velocidad de propagación de dicha onda. b) Determinar la velocidad máxima de oscilación de un punto cualquiera x. c) ¿Para qué valor del tiempo será máxima la velocidad de oscilación del punto x = 2 m?.

Solución: a) La ecuación de la onda puede ponerse también en la forma:

$$y = 0,2\,\mathrm{sen}\,(\pi x - 10\pi t)$$

Partiendo de los valores:

$$k = \frac{\omega}{v} = \pi \quad \mathrm{y} \quad \omega = 10\pi$$

Obtenemos v = **10 m· $\mathbf{s^{-1}}$**.
b) La velocidad de oscilación de cualquier punto será:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,2\cdot 10\pi\,\mathrm{cos}\,(\pi\mathrm{x} - 10\pi\mathrm{t})$$

El valor máximo será: v = Aω = 0,2·10π = **2π m· $\mathbf{s^{-1}}$**
c) La velocidad máxima para el punto x = 2 m se dará cuando:

$$2\pi = 2\pi\mathrm{cos}\,(2\pi - 10\pi\mathrm{t}) \longrightarrow \mathrm{cos}\,(2\pi - 10\pi t) = 1 \text{ y } (2\pi - 10\pi t) = 0$$

Con lo que, despejando, se obtiene:

$$t = \frac{2\pi}{10\pi} = 0,2\,\mathrm{s}$$

40. (**Comunidad Valenciana, Jun. 2016**) Una persona de 70 kg de masa está d3e pie sobre una plataforma que oscila verticalmente alrededor de su posición de equilibrio, comportándose como un oscilador armónico simple. Su posición inicial es $y_0 = A\,sen\,(\pi/3)$ cm (A = 15 cm), y su velocidad inicial $v_y(0) = 0,6\,cos\,(\pi/3)$ m/s. Calcula razonadamente: a) La pulsación o frecuencia angular y la posición $y(t)$ de la persona en función del tiempo. b) La energía mecánica de dicho oscilador en cualquier instante.

Solución: a) la ecuación del MAS será $y = A\,sen\,(\omega t + \pi/3)$. Sabiendo que la velocidad inicial vendrá dada por la expresión: $v = A\omega\cos\pi/3 = 0,6\cos(\pi/3)$, observamos que 0,6 = 0,15ω, con lo que:

$$\omega = 0,6/0,15 = 4\,s^{-1}$$

La posición será:

$$y = 0,15\,sen\,(4t + \pi/3).$$

b) La energía mecánica es:

$$E = \frac{1}{2}KA^2$$

Conocida la pulsación, podemos hallar la constante K de la forma:

$$K = m\omega^2 = 70 \cdot 4^2 = 1120\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

41. (**Comunidad Valenciana, Jul. 2016**) Un cuerpo de masa 4 kg describe un movimiento armónico simple con un periodo T = 2 s y una amplitud A = 2 m . Calcula la energía cinética máxima de dicho cuerpo y razona en qué posición se alcanza respecto al equilibrio. ¿Cuánto vale su energía potencial en dicho punto? Justifica la respuesta.

Solución: La energía del MAS simple es:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = E_c + \frac{1}{2}Kx^2$$

La energía cinética máxima se dará cuando el cuerpo pase por la posición de equilibrio (x = 0). Por otra parte, el periodo de oscilación será:

$$T = 2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{K}} \quad \text{obteniéndose :} \quad K = 4\pi^2\,\mathrm{N/m}$$

La energía cinética será, entonces::

$$E : c = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}4\pi^2 \cdot 2^2 = 8\pi^2\,\mathrm{J}$$

La energía potencial en este punto es nula, por la razón antes indicada.

42. (**Comunidad Valenciana, Jul. 2016**) Un dispositivo mecánico genera vibraciones que se propagan como ondas longitudinales armónicas a lo largo de un muelle. La función de la elongación de la onda, si el tiempo se mide en segundos, es: $e(x,t) = 2 \cdot 10^{-3}$ sen $(2\pi t - \pi x)$. Calcula razonadamente: a) La velocidad de propagación de la onda y la distancia entre dos compresiones sucesivas. b) Un instante en el que, para el punto x = 0,5 m, la velocidad de vibración sea máxima.

Solución: a) El número de ondas, k, puede expresarse de la siguiente forma:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v} \qquad \text{Por lo cual :} \qquad \pi = \frac{2\pi}{v} \quad \text{y} \quad v = 2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Puesto que la pulsación es: $\omega = 2\pi\nu$,tendremos: $2\pi\nu = 2\pi$, por lo que: $\nu = 1\,s^{-1}$. La longitud de onda (distancia entre dos compresiones sucesivas) será, entonces:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2}{1} = 2\,\mathrm{m}$$

b) La velocidad de vibración es:

$$v = \frac{de}{dt} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cos\left(2\pi t - \pi x\right)$$

La velocidad máxima será:

$$v_{max} = 4\pi \cdot 10^{-3} \quad \text{lo que tiene lugar cuando :} \quad \cos\left(2\pi t - \pi x\right) = 1 \quad y \quad \left(2\pi t - \pi x\right) = 0$$

Así pues, podremos escribir:

$$2\pi t - \frac{\pi}{2} = 0 \longrightarrow t = 0,25\,\mathrm{s}$$