# TEMA 10 – APLICACIONES DE LA DERIVADA

## RECTA TANGENTE

EJERCICIO 1 : Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{\sqrt{x^2+5}}{x(x+2)}$ en $x_0 = 2$.

EJERCICIO 2 : Halla en qué punto (o puntos) la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x + 1$ es paralela al eje de abscisas, y encuentra la ecuación de esa (o esas) recta (rectas).

EJERCICIO 3 : Escribe las ecuaciones de la rectas tangentes a la curva $3x^2 - y^2 - 2x + 9 = 0$ en $x_0 = -1$

EJERCICIO 4 : Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ en su punto de inflexión.

EJERCICIO 5 : Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ en $x_0 = 2$.

EJERCICIO 6 : Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ en el punto (0, 4).

EJERCICIO 7 : Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva: $y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)}$ en $x_0 = 1$

EJERCICIO 8 : Halla las rectas tangentes a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ en $x_0 = 1$

EJERCICIO 9 : Dada la función $f(x) = x^2 e^{x^2-1}$, escribe la ecuación de su recta tangente en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

## ESTUDIO DE FUNCIONES

EJERCICIO 10 : Estudia la monotonía de la función $f(x) = (x-1)e^x$

EJERCICIO 11 : Estudia la monotonía de la función $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 3)$ y determina los máximos y mínimos relativos.

EJERCICIO 12 : Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

EJERCICIO 13 : Halla los máximos y mínimos de la función $y = \frac{x}{Lx}$

EJERCICIO 14 : Estudia la curvatura de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ y determina los puntos de inflexión.

## PROBLEMAS CON FUNCIONES

EJERCICIO 15 : Un agricultor estima que si vende el kilogramo de cebollas a $x$ céntimos de euro, entonces su beneficio por kilogramo sería igual a $b(x) = 100x - x^2 - 2\,475$.
a) ¿Qué niveles de precios suponen beneficios para el agricultor?
b) ¿Cuál es el precio que maximiza el beneficio del agricultor?
c) Si dispone de 50 000 kg de cebollas, ¿cuál es el beneficio total máximo?

## PROBLEMAS CON PARÁMETROS

EJERCICIO 16 : Dada la función: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, calcula los valores de a, b y c para que la función tenga un mínimo en $x = 1$ y un punto de inflexión en el origen de coordenadas.

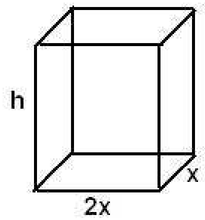
EJERCICIO 17 : Halla los valores de **b** y **c** para que la curva $y = x^3 + bx^2 + cx + 1$ tenga en el punto (0, 1) una inflexión y la pendiente de la recta tangente en dicho punto valga 1.

## PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

EJERCICIO 18 : Con un alambre de 4 metros se quiere construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?

EJERCICIO 19 : Se desea construir un marco rectangular para una ventana de 6 $m^2$ de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 € y el tramo vertical es a 30 € el metro. Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste de marco sea mínimo.

EJERCICIO 20 : Considérese un prisma recto de base rectangular, con dos de los lados de ese rectángulo de longitud doble que los otros dos, tal como se indica en la figura. Halla las dimensiones que ha de tener este prisma para que el área total sea de 12 metros cuadrados y que con estas condiciones tenga volumen máximo.




EJERCICIO 21 : El lado de un cuadrado tiene una longitud de 4 metros. Entre todos los rectángulos inscritos en el cuadrado dado, halla el de área mínima:

EJERCICIO 22 : Un transportista va de una ciudad A a otra B a una velocidad constante de x km/h por una carretera en la que debe cumplirse que $35 < x < 55$. El precio del carburante es de 0,6 euros el litro y el consumo es de $10 + x^2/120$ litros por hora. El conductor cobra 8 euros por hora y la distancia entre A y B es de 300 km. Halla la velocidad a la que debe ir para que el viaje resulte lo más económico posible.

EJERCICIO 23 : La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 1 dm. Hacemos girar el triángulo alrededor de uno de sus catetos. Determina la longitud de los catetos de forma que el cono engendrado de esta forma tenga volumen máximo.

EJERCICIO 24 : Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

EJERCICIO 25 : Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

EJERCICIO 26 : Demuestra que, entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo. (Llama k al área del rectángulo y ten en cuenta que es constante).

EJERCICIO 27 : Demuestra que, entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en un círculo de radio R, el cuadrado tiene el área máxima.

## REGLA DE L´HOPITAL

EJERCICIO 28 : Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+3}-\dfrac{2x+1}{3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x+\operatorname{sen}x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{\operatorname{sen}2x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-3\cos x}{e^x+x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x\cos x + \operatorname{sen} x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen}x}{x^3}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{arctg}x - x}{2x - \operatorname{arcsen}x}$ j) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(1 - \cos\dfrac{1}{x}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; l) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[x]{x}$

## APLICACIÓN DE TEOREMAS DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

EJERCICIO 29 : Demuestra que la ecuación: $x^7 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real. Determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

EJERCICIO 30 : Comprueba si la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. En caso afirmativo, averigua dónde cumple la tesis.

EJERCICIO 31 : Comprueba que $y = x + x^3$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-2, 1]. ¿Dónde cumple la tesis?

EJERCICIO 32 : Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Comprueba que satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2]. ¿Dónde cumple la tesis?

EJERCICIO 33 : Calcula a, b y c para que la función: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax & \text{si } x < 2 \\ bx + c & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. ¿Qué asegura el teorema en este caso?

EJERCICIO 34 : Demuestra que la ecuación: $e^x + x - 1 = 0$ solo tiene la raíz $x = 0$. Para ello, supón que tuviera otra raíz (digamos $x = a$), aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = e^x + x - 1$ en [0, a] (o en [a, 0] si $a < 0$) y llegarás a una contradicción.

EJERCICIO 35 : Calcula m y n para que la función: $f(x) = \begin{cases} mx + 1 & \text{si } x \le 1 \\ -2x^2 + 3x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]. ¿Dónde cumple la tesis?

EJERCICIO 36 :¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x - 2}$ en el intervalo [0, 4]?. Razona la contestación.

EJERCICIO 37 : Comprueba si se verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - 4x + 11$, en el intervalo [1, 3].

EJERCICIO 38 : Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo [-2, -1].

EJERCICIO 39 : Calcula *a* y *b* para que $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿Dónde cumple la tesis?

EJERCICIO 40 : Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+nx & \text{si} \quad x<-2 \\ x^3+m & \text{si} \quad x\geq -2 \end{cases}$

a. Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-4, 2]
b. Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

EJERCICIO 41 : Justifica los pasos de la siguiente demostración:
Vamos a probar que "si f es continua en [a, b] y derivable en (a, b); y f' (x) = 0 en todos los puntos de (a, b), entonces f es constante en [a, b]".

1) Tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ de [a, b]; entonces se cumple que: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0$

2) Por tanto, $f(x_2) - f(x_1) = 0$.

3) Y así deducimos que f es constante.

EJERCICIO 42 : Demuestra que la función: $f(x)=\begin{cases} -3x+4 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

no cumple la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, b], cualquiera que sea el valor de b > 1.